分数阶时滞广义 Logistic 方程解的研究*

袁利国
（华南农业大学数学系，广东 广州 510642）

摘　要： 基于 Banach 不动点定理与分数阶微积分的相关性质，首先研究了分数阶时滞广义 Logistic 方程解的存在唯一性，同时得到解的一致稳定性的充分条件。最后，利用改进的 Adams-Bashforth-Moulton 预估 - 校正算法得到其数值解。

关键词： Caputo 分数阶导数；分数阶时滞 Logistic 方程；Banach 不动点定理；存在唯一性

中图分类号： O175. 6　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 - 6579（2014）02 - 0044 - 05

Research on Solutions of Fractional-Order Generalized Logistic Equation with Delay

YUAN Liguo
（Department of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China）

Abstract: Based on the Banach fixed point theorem and properties of differential and integral calculus of fractional-order, the existence and uniqueness of solutions for the fractional-order generalized Logistic equation with delay are discussed. Some sufficient conditions for uniform stability of solutions are obtained. The numerical solution is obtained by the modified Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector scheme.

Key words: fractional-order derivative of Caputo; fractional-order logistic equation with delay; Banach's fixed point theorem; existence and uniqueness

最近 20 年，分数阶微分系统的理论与应用引起学者的广泛研究[1-17]。由于分数阶微积分的非局域性，与整数阶微积分相比，分数阶微积分能更好地刻画一些现实问题，其中部分文献用分数阶微积分的理论来研究生物种群的变化规律[1-7]。同时，在生物系统中时滞现象也大量存在，因此研究分数阶时滞系统有实际意义[3,5-6]。DAS S 等[1]利用同伦扰动方法给出了分数阶广义 Logistic 方程的近似解析解。程媛媛与蒋威[3]研究了一类分数阶时滞单种群模型的平衡点的局部稳定性。EL-SAYEDABBAS等[2,4]研究了分数阶 Logistic 方程及其改进模型的动力学。EL-SAYED 与 SWEILAM 等[5-6]研究了分数阶双时滞 Logistic 方程解的存在性、稳定性与数值解。本文研究如下分数阶时滞广义 Logistic 方程[1,5]

$$\begin{cases} D_*^{\alpha} x(t) = \dfrac{r}{b} x(t)\left[1 - \left(\dfrac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right], t > 0, \\ x(t) = x_0, t \leqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性、一致稳定性及数值解问题，其中 $0 < \alpha < 1$，b, r, k 为正常数，$\frac{r}{b}, k$ 分别称为内禀增长率与环境容纳量，$\tau > 0$ 为时滞。当 $\alpha = 1, b = 1, k = 1, \tau = 0$ 时，方程（1）退化为经典的 Logistic 方程。目前，线性分数阶时滞微分方程解的稳定性

* **收稿日期：** 2013 - 08 - 23
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（11271139）；广东省自然科学基金资助项目（S2013040016144）
作者简介： 袁利国（1979 年生），男；**研究方向：** 分数阶微分方程理论、动力系统中的混沌与分支；E-mail：liguoy@scau. edu. cn

与存在性已有很多研究且得到一般的结论[8-13]。但分数阶时滞微分方程（1）是非线性分数阶时滞微分方程，对这种非线性方程解的存在唯一性的研究不多，通常对右端非线性函数有 Lipschitz 假设条件的限制，但这个条件在具体问题中并不好验证，且少有现成的一般结论。本文利用 Banach 不动点定理证明方程（1）解的存在唯一性。同时其精确解通常也很难求出，因此本文首次利用改进的 Adams-Bashforth-Moulton 预估－校正算法求得此分数阶时滞方程的数值解。

1　预备知识

记区间 $I=[0,T]$ 且 $T<\infty$，$C(I)$ 是 I 上赋予范数 $\|x\|=\sup_t|\mathrm{e}^{-Nt}x(t)|$ 的所有连续函数构成的集合。$L_1[0,T]$ 表示区间 I 上具有范数 $\|x\|_1=\int_0^T\mathrm{e}^{-Nt}|x(t)|\,\mathrm{d}t$ 的所有可积函数构成的集合，其中 $N>0$[14]。

定义 1　函数 $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 定义如下 $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，称为欧拉伽玛函数。

定义 2　设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$，则 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分算子定义为 $I^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t$，其中 x,a 为积分上下限。

定义 3　设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$，则 α 阶 Caputo 分数阶导数定义为 $D_*^\alpha f(x)=I^{n-\alpha}f^{(n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\int_a^x\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t$，其中 $n=[\alpha]+1$，$f^{(n)}$ 是函数 f 的通常意义下的 n 阶导数。

引理 1　（Banach 不动点定理）设 (U,d) 是一非空的完备度量空间，$0\leqslant\omega<1$，映射 $T:U\to U$ 满足：对任意 $u,v\in U$，有 $d(Tu,Tv)\leqslant\omega d(u,v)$ 成立，那么算子 T 有唯一的不动点 $u*\in U$。进一步，如果 $T^k(k\in\mathbf{N})$ 是算子的迭代序列，即 $T^1=T$，$T^k=TT^{k-1}$，那么对任意 $u_0\in U$，序列 $\{T^ku_0\}_{k=1}^\infty$ 收敛到不动点 $u*$。

2　解的存在唯一性与稳定性

基于 EL-SAYED A M A 等[5]的文献中方法，假设对初值问题（1）定义 $C(I)=\{x\in\mathbf{R}:x(t)\in[0,1],t\in I\}$，且 $t\leqslant0$ 时，有 $x(t)=x_0$ 成立，则有如下结论。

定理 1　如果条件 $\frac{r}{b}\frac{1}{N^\alpha}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{N\tau}}+\frac{1}{k^b}\right)<1$ 成立，则分数阶时滞广义 Logistic 方程（1）存在唯一的解 $x(t)\in C(I)$。

证明　基于分数阶微积分性质，分数阶时滞微分方程（1）可写成

$$I^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=\frac{r}{b}x(t)\left[1-\left(\frac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right]$$

对此方程的两边同时作用积分算子 I^α，得

$$x(t)=x_0+\frac{r}{b}I^\alpha x(t)\left[1-\left(\frac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right]$$

定义算子 $Fx(t)=x_0+\frac{r}{b}I^\alpha x(t)\left[1-\left(\frac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right]$，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-Nt}|Fx(t)-Fy(t)|=\\
&\mathrm{e}^{-Nt}\left|\frac{r}{b}I^\alpha x(t)\left[1-\left(\frac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right]-\frac{r}{b}I^\alpha y(t)\left[1-\left(\frac{y(t-\tau)}{k}\right)^b\right]\right|=\\
&\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)\left[1-\left(\frac{x(s-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}s-\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\left[1-\left(\frac{y(s-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}s\right|=\\
&\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[y(s)\left(\frac{y(s-\tau)}{k}\right)^b-x(s)\left(\frac{x(s-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}s\right|\leqslant\\
&\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s\right|+\\
&\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[y(s)\left(\frac{y(s-\tau)}{k}\right)^b-x(s)\left(\frac{x(s-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}s\right|
\end{aligned}\tag{2}$$

记

$$A_1=\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s\right|,$$

$$A_2=\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\left[y(s)\left(\frac{y(s-\tau)}{k}\right)^b-x(s)\left(\frac{x(s-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}s\right|$$

则

$$\begin{aligned}
A_1&\leqslant\frac{r}{b}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nt}|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s=\\
&\frac{r}{b}\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(t-s)}\mathrm{e}^{-Ns}|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&\frac{r}{b}\|y-x\|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(t-s)}\mathrm{d}s\leqslant\\
&-\frac{r}{b}\|y-x\|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(t-s)}\mathrm{d}(t-s)\leqslant\\
&\frac{r}{b}\|y-x\|\int_0^t\frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}h\leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{r}{b}\|y-x\|N^{-\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{(Nh)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}(Nh)=$$

$$\frac{r}{b}N^{-\alpha}\|y-x\| \tag{3}$$

$$A_2=\frac{r}{b}\mathrm{e}^{-Nt}\frac{1}{k^b}\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\right.$$

$$\left.[y(s)y^b(s-\tau)-x(s)x^b(s-\tau)]\mathrm{d}s\right|=$$

$$\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\left|\int_0^\tau\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[y(s)y^b(s-\tau)-x(s)x^b(s-\tau)]\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_\tau^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[y(s)y^b(s-\tau)-x(s)x^b(s-\tau)]\mathrm{d}s\right|$$

其中 $\int_0^\tau\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[y(s)y^b(s-\tau)-x(s)x^b(s-\tau)]\mathrm{d}s=0$（因为 $s-\tau<0, x(s-\tau)=0$），因此，

$$A_2=\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\cdot$$

$$\left|\int_\tau^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[y(s)y^b(s-\tau)-x(s)x^b(s-\tau)]\mathrm{d}s\right|$$

做变换 $s-\tau=\theta$，得

$$A_2=\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\mathrm{e}^{-Nt}\times$$

$$\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[y(\theta+\tau)y^b(\theta)-x(\theta+\tau)x^b(\theta)]\mathrm{d}\theta\right|=$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\mathrm{e}^{-Nt}\times\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\right.$$

$$[y(\theta+\tau)y^b(\theta)-y(\theta+\tau)x^b(\theta)+$$

$$\left.y(\theta+\tau)x^b(\theta)-x(\theta+\tau)x^b(\theta)]\mathrm{d}\theta\right|\leqslant$$

$$\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\theta+\tau)[y^b(\theta)-x^b(\theta)]\mathrm{d}\theta\right|+$$

$$\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^b(\theta)[y(\theta+\tau)-x(\theta+\tau)]\mathrm{d}\theta\right| \tag{4}$$

记

$$B_1=\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\theta+\tau)[y^b(\theta)-x^b(\theta)]\mathrm{d}\theta\right|,$$

$$B_2=\frac{r\mathrm{e}^{-Nt}}{bk^b}\left|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x^b(\theta)[y(\theta+\tau)-x(\theta+\tau)]\mathrm{d}\theta\right|$$

而 $y^b(\theta)-x^b(\theta)=b\xi^{b-1}(\theta)|y(\theta)-x(\theta)|$，其中 $\xi(\theta)$ 落在 $y(\theta)$ 与 $x(\theta)$ 之间，由于 $|x(\theta)|<1$ 与 $|y(\theta)|<1$，得

$$B_1\leqslant\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}b\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(t-\theta)}\mathrm{e}^{-N\theta}\cdot$$

$$|y(\theta)-x(\theta)|\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$\frac{r}{k^b}\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(t-\theta)}\mathrm{d}\theta\|y-x\|$$

令 $t-\theta-\tau=h$，则

$$B_1\leqslant-\frac{r}{k^b}\int_{t-\tau}^0\frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-N(h+\tau)}\mathrm{d}h\|y-x\|=$$

$$\frac{r}{k^b}\int_0^{t-\tau}\frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}h\times\mathrm{e}^{-N\tau}\|y-x\|\leqslant$$

$$\frac{r}{k^b}\mathrm{e}^{-N\tau}N^{-\alpha}\|y-x\|\int_0^{+\infty}\frac{(Nh)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}(Nh)=$$

$$\frac{r}{k^b}\mathrm{e}^{-N\tau}N^{-\alpha}\|y-x\| \tag{5}$$

而

$$B_2\leqslant\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nt}\mathrm{e}^{-N(\theta+\tau)}\mathrm{e}^{N(\theta+\tau)}\cdot$$

$$|y(\theta+\tau)-x(\theta+\tau)|\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\|y-x\|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nt+N(\theta+\tau)}\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\mathrm{e}^{N(\tau-t)}\|y-x\|\int_0^{t-\tau}\frac{(t-\theta-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{N\theta}\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\mathrm{e}^{N(\tau-t)}\|y-x\|\int_0^{t-\tau}\frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{N(t-\tau)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}h=$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\frac{1}{N}N^{1-\alpha}\|y-x\|\int_0^{+\infty}\frac{(Nh)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{e}^{-Nh}\mathrm{d}(Nh)=$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\frac{1}{N^\alpha}\|y-x\| \tag{6}$$

基于以上分析（2）–（6）及范数定义，得

$$\|Fx(t)-Fy(t)\|\leqslant A_1+A_2\leqslant A_1+B_1+B_2\leqslant$$

$$\frac{r}{b}N^{-\alpha}\|y-x\|+\frac{r}{k^b}\mathrm{e}^{-N\tau}N^{-\alpha}\|y-x\|+$$

$$\frac{r}{b}\frac{1}{k^b}\frac{1}{N^\alpha}\|y-x\| \tag{7}$$

即

$$\|Fx(t)-Fy(t)\|\leqslant\frac{r}{b}\frac{1}{N^\alpha}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{N\tau}}+\frac{1}{k^b}\right)\|y-x\|$$

当 N 充分大，总是可以使得 $\frac{r}{b}\frac{1}{N^\alpha}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{N\tau}}+\frac{1}{k^b}\right)<1$，由已知条件得算子 F 是压缩的。基于引理 1 知积分方程有唯一解，即分数阶时滞广义 Logistic 方程（1）有唯一解。

定理 2 方程（1）的解是一致稳定的。

证明 假设 $y(t)$ 是如下分数阶时滞广义 Logistic 微分方程的解

$$\begin{cases}D_*^\alpha y(t)=\frac{r}{b}y(t)\left[1-\left(\frac{y(t-\tau)}{k}\right)^b\right], t>0,\\ y(t)=y_0, -\tau<t\leqslant 0\end{cases} \tag{8}$$

则

$$x(t)-y(t)=(x_0-y_0)+$$

$$\frac{r}{b}I^\alpha\left\{x(t)\left[1-\left(\frac{x(t-\tau)}{k}\right)^b\right]-y(t)\left[1-\left(\frac{y(t-\tau)}{k}\right)^b\right]\right\}$$

两边同时乘上 e^{-Nt}，并取绝对值，利用范数定义与定理 1 的结论，得

$$\|x-y\| \leqslant |x_0-y_0| + \frac{r}{b}\frac{1}{N^\alpha}\left(1+\frac{1}{e^{N\tau}}+\frac{1}{k^b}\right)\|y-x\|$$

因此

$$\|x-y\| \leqslant \left[1-\frac{r}{b}\frac{1}{N^\alpha}\left(1+\frac{1}{e^{N\tau}}+\frac{1}{k^b}\right)\right]^{-1}|x_0-y_0|$$

即当初始值 $|x_0-y_0|<\varepsilon$，则解 $\|x-y\|\leqslant\delta(\varepsilon)$ 成立，故方程（1）的解是一致稳定的。

3　数值解

基于改进的 Adams-Bashforth-Moulton 预估－校正算法[15-16]，下面给出

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) = \frac{r}{b}y(t)\left[1-\left(\frac{y(t-\tau)}{k}\right)^b\right], 0<t<T, \\ y(t)=y_0, -\tau<t\leqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

的数值解。建立时间网格 $\{t_n=nh: n=-k,-k+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,N\}$，其中 k 与 N 是正整数，且 $h=\frac{T-0}{N}=\frac{0-(-\tau)}{k}$，设

$$y_h(t_j)=y_0,(j=-k,-k+1,\cdots,-1,0);$$
$$y_h(t_j-\tau)=y_h(jh-kh)=y_h(t_{j-k}),$$
$$(j=0,1,\cdots,N)$$

假设已经计算得到近似值 $y_h(t_j)\approx y(t_j)$ $(j=-k,-k+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,n)$，对原方程（9）的两边同时作用积分算子，并利用 $y_h(t_n)\approx y(t_n)$，则

$$y(t_{n+1}) = y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{h+1}(t_{n+1}-\xi)^{\alpha-1}\cdot \frac{r}{b}y(\xi)\left[1-\left(\frac{y(\xi-\tau)}{k}\right)^b\right]\mathrm{d}\xi \tag{10}$$

对（10）式中的积分项利用 product trapezoidal quadrature 公式，得校正表达式

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) &= y_0+\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\cdot \frac{r}{b}y_h(t_{n+1})\left[1-\left(\frac{y_h(t_{n+1}-\tau)}{k}\right)^b\right]+ \\ &\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\sum_{j=0}^n a_{j,n+1}\frac{r}{b}y_h(t_j)\left[1-\left(\frac{y_h(t_j-\tau)}{k}\right)^b\right] = \\ &y_0+\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{r}{b}y_h(t_{n+1})\left[1-\left(\frac{y_h(t_{n+1-k})}{k}\right)^b\right]+ \\ &\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}\sum_{j=0}^n a_{j,n+1}\frac{r}{b}y_h(t_j)\left[1-\left(\frac{y_h(t_{j-k})}{k}\right)^b\right] \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1}-(n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1}+(n-j)^{\alpha+1}-2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1\leqslant j\leqslant n \\ 1, & j=n+1 \end{cases} \tag{12}$$

而（11）式中的左右两边均出现了 $y_h(t_{n+1})$，因此对（11）式右端的 $y_h(t_{n+1})$ 用预估项 $y_h^P(t_{n+1})$，对（10）式利用 Product rectangle rule 得

$$\begin{aligned} y_h^P(t_{n+1}) &= y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^n b_{j,n+1}\cdot \frac{ry_h(t_j)}{b}\left[1-\left(\frac{y_h(t_j-\tau)}{k}\right)^b\right] = \\ &y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^n b_{j,n+1}\frac{ry_h(t_j)}{b}\left[1-\left(\frac{y_h(t_{j-k})}{k}\right)^b\right] \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$b_{j,n+1}=\frac{h^\alpha}{\alpha}((n+1-j)^\alpha-(n-j)^\alpha) \tag{14}$$

结合（11）－（14）式，得到（9）式的数值解 $y_h(t_j)(j=-k,-k+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,N)$。

现对 $x(t)$ 仅限制大于 0，固定参数值 $\alpha=0.9$，$b=1$，$r=0.5$，$k=1$，$\tau=7$，$T=80$，利用 Matlab 编程得数值解，如图 1 所示。

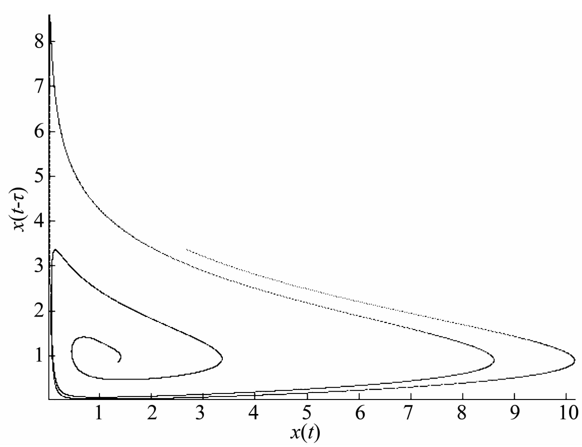

图 1　数值解

Fig. 1　Numerical solution

4　结　论

非线性分数阶时滞微分方程的解的研究还较少，且其精确解通常很难求得。本文得到了非线性分数阶时滞广义 Logistic 方程解的存在唯一性及其

解的一致稳定性的充分条件，同时利用改进的 Adams-Bashforth-Moulton 预估－校正算法给出其数值解，结合 Matlab 编程实现数值模拟。对非线性分数阶时滞方程解的更一般理论还须进一步研究。

参考文献：

[1] DAS S, GUPTA P K, VISHAL K. Approximate approach to the Das model of fractional logistic population growth [J]. Appl Appl Math, 2010, 5(10):1702 – 1708.

[2] EL-SAYED A M A, EL-MESIRY A E M, EL-SAKA H A A. On the fractional-order logistic equation [J]. Appl Math Lett, 2007, 20: 817 – 823.

[3] 程媛媛,蒋威. 分数阶时滞单种群模型的稳定性[J]. 佳木斯大学学报, 2012, 30: 468 – 473.

[4] ABBAS S, BANERJEE M, MOMANI S. Dynamical analysis of fractional-order modified logistic model [J]. Comput Math Appl, 2011, 62: 1098 – 1104.

[5] EL-SAYED A M A, EL-SAKA H A A, EL-MAGHRABI E M. On the fractional-order logistic equation with two different delays [J]. Z Naturforsch, 2011, 66a: 1 – 5.

[6] SWEILAM N H, KHADER M M, MAHDY A M S. Numerical studies for fractional-order logistic differential equation with two different delays [J]. J Appl Math, 2012, ID 764894: 1 – 14.

[7] SWEILAM N H, KHADER M M, MAHDY A M S. Numerical studies for solving fractional-order logistic equation [J]. Int J Pure Appl Math, 2012, 78: 1199 – 1210.

[8] ZHANG X Y. Some results of linear fractional order time-delay system [J]. Appl Math Comput, 2008, 197: 407 – 411.

[9] 刘丽琼,钟守铭,索宇. 线性分数阶多时滞系统的解的存在唯一性[J]. 西南民族大学学报, 2011, 37: 719 – 721.

[10] 黄郑,蒋威. 一类分数阶时滞微分系统的解[J]. 合肥学院学报, 2012, 22: 8 – 10.

[11] 杨水平. 关于分数阶多阶延迟微分方程的解的存在性[J]. 惠州学院学报, 2011, 31: 29 – 31.

[12] 魏谓婷,卢旋珠. 一类广义分数阶时间迟滞微分方程的一些结果[J]. 福州大学学报, 2010, 38: 166 – 171.

[13] DENG W H, LI C P, LU J H. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays [J]. Nonlinear Dynam, 2007, 48: 409 – 416.

[14] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equation [M]. New York: Elsevier, 2006.

[15] BHALEKAR S, DAFTARDAR-GEJJI V. A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order [J]. J Fract Calc Appl, 2011, 6: 1 – 9.

[16] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations [J]. Nonlinear Dynam, 2002, 29: 3 – 22.

[17] 王金华,赵育林,向红军. 分数微分方程 m 点边值问题解的存在性与唯一性[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2011, 50(1): 4 – 8.